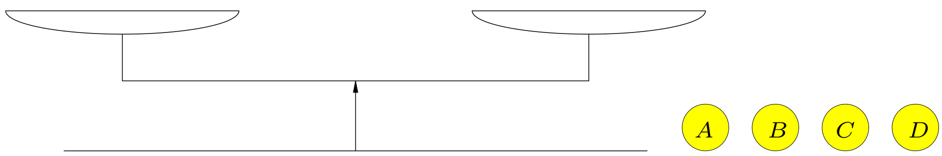
Problemes 1a fase

2n d'ESO (Nivell 3)

1. Amb el mínim de pesades

Tenim un conjunt de boles de la mateixa mida que estan marcades amb les lletres A, B, C, ... Cada bola té un pes diferent de la resta i volem ordenar les boles en ordre creixent de pesos (de més lleugera a més pesada), però com que les diferències entre els pesos són petites, hem d'utilitzar una balança de plats per comparar els pesos.



a) En el cas que hi hagi 4 boles A, B, C i D, busqueu un mètode per a ordenar-les pel pes fent servir la balança. Heu de mostrar quines serien les pesades en qualsevol dels casos que es puguin presentar al llarg del procediment.

Quin és el mínim de pesades que calen per tal de garantir que arribarem a ordenar-les correctament en tots els casos?

b) En el cas que hi hagi 5 boles A, B, C, D i E, quin el mínim de pesades que calen per tal de garantir que arribarem a ordenar-les correctament en tots els casos?

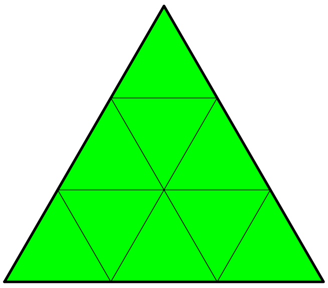
c) I si n'hi hagués 6, 7 o 8 boles?

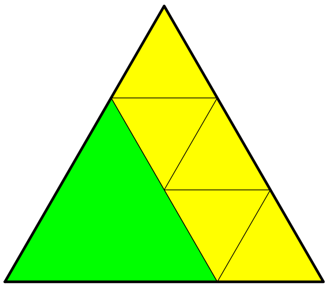
d) En el cas que siguin 4 boles de les quals coneixem que la diferència de pes entre dues boles de pesos consecutius és de 10 g (és a dir, que hi ha tres boles que pesen respectivament 10 g, 20 g i 30 g més que la més lleugera), el nombre mínim de pesades necessàries per a garantir que poguem ordenar-les pels pesos és més petit que en el cas general.

Trobeu un procediment amb el qual es disminueixi el nombre mínim de pesades que garanteixin l'ordenació.

2. Molts equilàters

Tots els triangles equilàters on la longitud del costat és un nombre enter es poden descompondre, de diverses maneres, en triangles equilàters també de costat enter i no necessàriament iguals. Per exemple, un triangle equilàter de costat 3, es pot dividir en nou triangles equilàters de costat 1, tal com podeu veure a la figura de l'esquerra, o en cinc triangles de costat 1 i un de costat 2 com a la figura de la dreta.





En el primer cas el triangle ha quedat dividit en nou peces i en el segon en sis.

Us proposem que exploreu les maneres de dividir un triangle equilàter de costat enter n en triangles equilàters també de costat enter i de manera que el nombre de triangles en què queda descompost sigui el més petit possible.

a) Mostreu la descomposició en el nombre mínim de peces de tots els triangles equilàters de costat enter n amb $n \leq 15$. Expliqueu les estratègies que heu fet servir per a trobar-les.

b) Mostreu la descomposició en el nombre mínim de peces dels triangles de costat $n = 21$ i $n = 39$ i fixeu-vos en el nombre de peces que us surten. Podeu esbrinar quin és el nombre mínim de triangles equilàters en què es podrà dividir un triangle equilàter de costat $n = 75$ sense fer la descomposició?

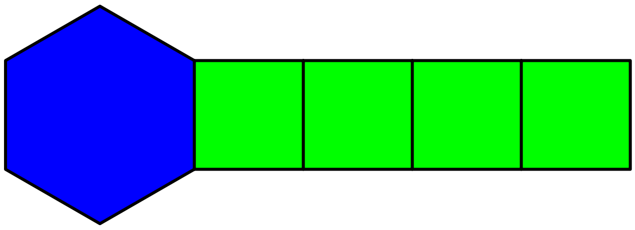
c) Mostreu la descomposició en el nombre mínim de peces dels triangles equilàters de costat $n = 25$ i $n = 35$ i observeu el nombre de peces que us surten. Podeu esbrinar quin és el nombre mínim de triangles equilàters en què es podrà dividir un triangle equilàter de costat $n = 115$ sense fer la descomposició?

d) Podeu esbrinar quin és el nombre mínim de triangles equilàters en què es podrà dividir un triangle equilàter de costat $n = 203$ sense fer la descomposició?

3. Emmagatzemant les fitxes

Es tracta d'un joc per a una sola persona. Al tauler de joc hi ha una sèrie de caselles iguals i una de més gran que anomenem *magatzem*. Inicialment, a cada una de les caselles iguals hi ha el mateix nombre de fitxes i al magatzem no n'hi ha cap.

La figura següent mostra un tauler amb quatre caselles i el magatzem.



L'objectiu del joc és reunir totes les fitxes al magatzem, respectant les regles següents:

Per començar el joc, el jugador tria una de les caselles i agafa totes les fitxes que hi ha. Després en deixa una a cada una de les caselles següents en direcció cap al magatzem. Si arriba a col·locar una fitxa al magatzem i encara li queden fitxes a la mà, continua repartint per la casella de més a la dreta. En acabar aquest procés poden haver succeït tres coses, que donen lloc a tres maneres diferents de continuar:

1. Que l'última fitxa repartida hagi caigut al magatzem. En aquest cas, el jugador tria una de les caselles que encara contenen fitxes, les agafa totes i repeteix el procés inicial.

2. Que l'última fitxa repartida hagi caigut en una casella que ja contenia altres fitxes. En aquest cas, el jugador agafa totes les fitxes d'aquesta casella i repeteix el procés inicial.

3. Que l'última fitxa repartida hagi caigut en una casella que havia quedat buida. En aquest cas, el jugador no pot continuar el joc i, per tant, no pot aconseguir el seu objectiu.

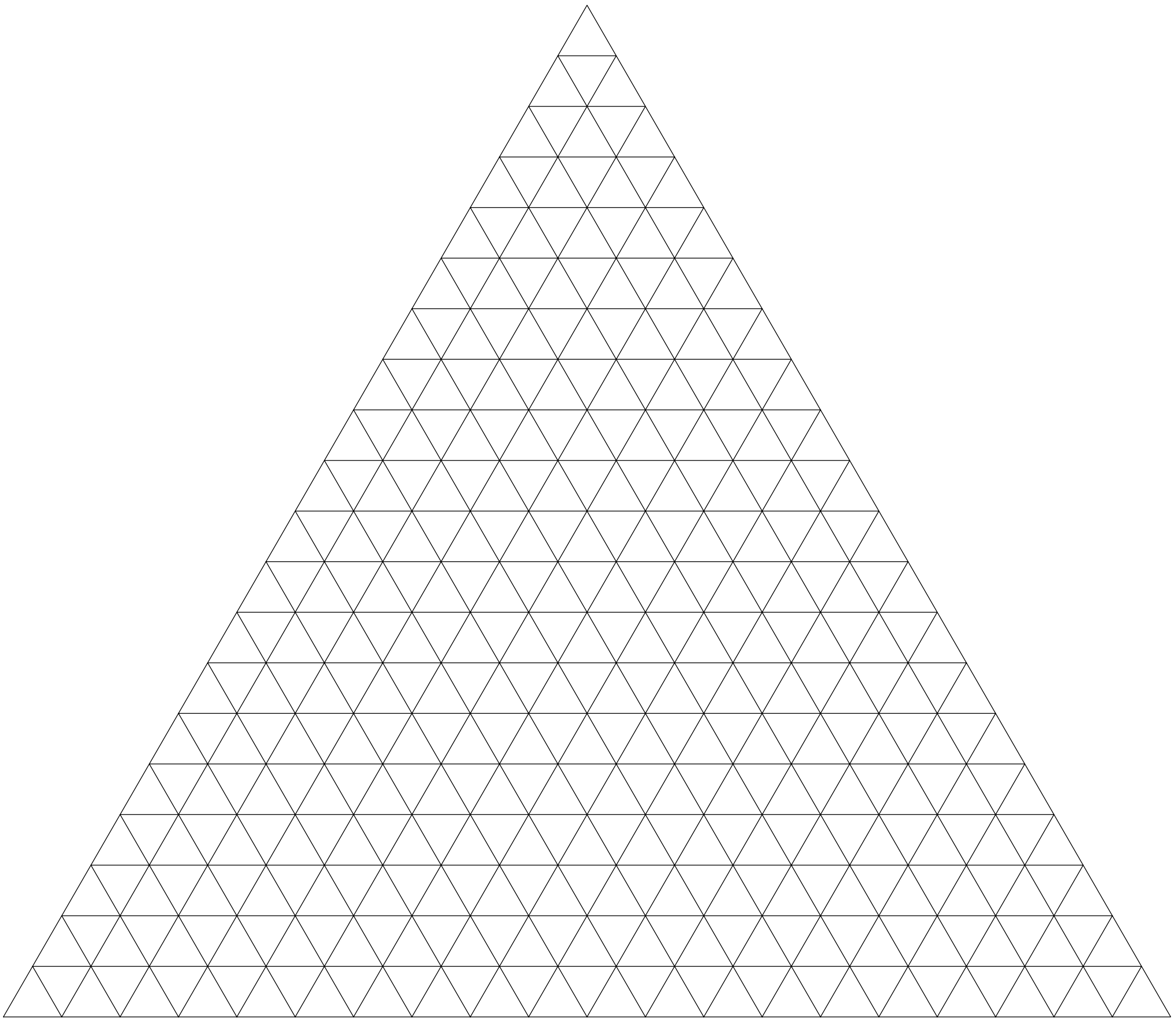
Contesteu les preguntes següents:

a) Si al tauler, a més del magatzem, hi ha una única casella amb n fitxes, per a quins valors de n el jugador aconseguirà el seu objectiu? Expliqueu la vostra resposta.

b) Si al tauler, a més del magatzem, hi ha dues caselles amb n fitxes cadascuna, quin és el valor més petit possible de n per al qual el jugador podrà aconseguir el seu objectiu? Expliqueu la vostra resposta i mostreu els repartiments necessaris per a aconseguir-lo.

c) Si al tauler, a més del magatzem, hi ha quatre caselles amb n fitxes cadascuna, quin és el valor més petit possible de n per al qual el jugador podrà aconseguir el seu objectiu? Expliqueu la vostra resposta i mostreu els repartiments que condueixen a aconseguir l'objectiu de la forma més ràpida possible.

Material complementari per al problema 2



feemcat
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

ABEAM
ASSOCIACIÓ DE BARCELONA PER A L'ESTUDI I L'APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES